

## **ÇOK DUVARLI KARBON NANOTÜPLERİN SERBEST TİTREŞİMİ**

Metin Aydoğdu  
Trakya Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü  
22180/Edirne  
e-mail:metina@trakya.edu.tr

### **ÖZET**

Bu çalışmada, basit destekli çok duvarlı karbon nanotüplerin titreşimi genelleştirilmiş kayma deformasyon teorisi kullanılarak incelenmiştir. Çözümlerde parabolik kayma deformasyon teorisi (PKDT) kullanılmıştır. Timoshenko kiriş teorisinden farklı olarak mevcut teori kiriş alt ve üst yüzeyindeki sınır şartlarını sağlar ve böylelikle kayma düzeltme çarpanına gerek yoktur. Serbest titreşim frekansları ve genlik oranları bulunmuş ve önceki çalışmalarla kıyaslanmıştır. Sonuçlar PKDT ile Euler teorisi arasında önemli bir farkın olduğunu göstermektedir. Kayma deformasyonu özellikle yüksek modlar için önem kazanmaktadır.

### **ABSTRACT**

In this study, free vibration of simply supported multi-walled carbon nanotubes (CNTs) was investigated by using the generalized shear deformation-beam theory (GSDBT). Parabolic shear deformation theory (PSDT) is used in the specific solutions. Unlike Timoshenko beam theory present theory satisfies zero traction boundary conditions on the upper and lower surface of the structures so there is no need to use a shear correction factor. Free vibration frequencies and amplitude ratios were obtained and results are compared with previous studies. Shear deformation effects are important especially for higher modes.

### **1. GİRİŞ**

Son yirmi yılda, karbon nanotüpler mekanik ve elektronik özellikleri sebebiyle nanoelektronik, nanomakinalar ve nanokompozitlerin üretimde önemli bir yer tutan elemanlar haline gelmişlerdir[1-6]. Nano mertebede deney yapmanın zor olması ve moleküler dinamik simülasyonlar ile sadece birkaç yüz atom içeren yapıların hesaplarının

yapılabilmesi sebebiyle, karbon nanotüplerin (KNT) sürekli bir elastik ortam olarak modellenmeleri yoluna gidilmiş ve serbest titreşim [7-13] davranışlarını araştırmak amacıyla kullanılmıştır. Özellikle tüp duvarları arasındaki etkileşimi ihmal eden tek duvar elastik kiriş modeli çok duvarlı karbon nanotüplerin mekanik davranışlarının analizinde kullanılmıştır.

Tek duvar elastik kiriş modeli iç içe olan tüplerin titreşim sırasında eş eksenli kaldıklarını kabul eder ve tek bir çökme eğrisi ile modellenir. Ancak son çalışmalar çok duvarlı nano tüplerde eş eksenli olmayan titreşimlerin ortaya çıktığını göstermektedir. Bu durumda mevcut tek duvar kiriş modelleri uygun olmamaktadır. Eş eksenli olmayan titreşimler elektronik ve optik gibi bazı önemli özellikleri etkilediğinden bu tip titreşimlerin incelenmesi oldukça önemlidir.

Bu çalışma da çok duvarlı karbon nanotüpler Parabolik kayma deformasyon kiriş teorisi kullanılarak modellenmektedir. Mevcut çalışma tüpler arası radyal yer değiştirmeyi göz önüne almaktadır.

## 2. GENEL KAYMA DEFORMASYON KİRİŞ TEORİSİ

KNT lerin deformasyonlarının sadece x-z düzleminde olduğunu kabul edilirse genel bir yer değiştirme alanı aşağıdaki gibi yazılabilir [14-15]:

$$U(x, z; t) = u(x; t) - zw_{,x} + \phi(z)u_1(x; t), \quad V(x, z; t) = 0, \quad W(x, z; t) = w(x; t). \quad (1)$$

Burada u ve w orta düzlemdeki bir noktanın x ve z doğrularındaki yer değiştirmelerini gösterirken,  $u_1$  orta düzlemde düşey kayma genlemelerinin etkilerini gösteren bir bilinmeyen ve  $\phi$  ise düşey kayma gerilmesinin dağılımını gösteren ve şekil fonksiyonu olarak adlandırılan bir fonksiyondur. Klasik Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri şekil fonksiyonunun sırasıyla sıfır ve z alınmasıyla elde edilebilir. Farklı şekil fonksiyonları kullanmak mümkündür ancak bu çalışmada aşağıdaki eşitlikte verilen şekil fonksiyonu kullanılacaktır.

$$\text{PKDT} \quad \phi(z) = z(1 - 4z^2 / 3h^2), \quad (2)$$

Bu şekil fonksiyonu parabolik kayma deformasyon teorisine karşılık gelmektedir [16]. Aşağıda verilen Hamilton prensibinin kullanılması ile KNT ait hareket denklemleri elde edilebilir. Burada T kinetik enerjiyi ve  $U_s$  genleme potansiyel enerjisini göstermektedir.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U_s) dt = 0 \quad (3)$$

### 3. KNT LERİN PKDT İLE MODELLENMESİ

#### 3.1. Tek duvarlı kiriş teorisi

Denklem 3'te verilen Hamilton prensibinin kullanılması ile hareket denklemleri yer değiştirmeler cinsinden aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
 -EI_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + E \left( I_1 - \frac{4}{3h^2} I_1' \right) \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} &= \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho \left( I_1 - \frac{4}{3h^2} I_1' \right) \frac{\partial^3 u_1}{\partial^2 t \partial x} - \rho I_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}, \\
 -E \left( I_1 - \frac{4}{3h^2} I_1' \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + E \left( I_1 - \frac{8}{3h^2} I_1' + \frac{16}{9h^4} I_1'' \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &- G \left( A - \frac{8}{h^2} I_1 + \frac{16}{h^4} I_1' \right) u_1 + F \\
 &= \rho \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) \left( I_1 - \frac{8}{3h^2} I_1' + \frac{16}{9h^4} I_1'' \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \left( I_1 - \frac{4}{3h^2} I_1' \right)
 \end{aligned} \quad (4)$$

Burada A kesit alanı,  $\rho$  birim hacim yoğunluğu, h kiriş kalınlığı ve  $\omega$  ise dairesel frekansı göstermektedir. Eşitlik (4) de verilen atalet terimleri aşağıda tanımlanmıştır.

$$(I_1, I_1', I_1'') = \int_A (z^2, z^4, z^6) dA, \quad (5)$$

#### 3.2. Çok duvarlı kiriş teorisi

Tek duvarlı kiriş modelleri her bir tüpün ve tüplerin bağlı hareketlerini gösteremez. Önceki çalışmalarda belirtildiği gibi tek duvarlı kiriş teorileri Çift duvarlı kirişler için az sayıda n-mertebe frekans kümesi verirler [7-9]. Her bir tüp için farklı sınır şartları olabileceğinden çok duvarlı tüpler için yeni teorilere ihtiyaç vardır. Aynı zamanda Çift duvarlı Kiriş Teorisi'nde (ÇDKT) van der Waals kuvvetlerinin etkileri göz önüne alınmaktadır.

Euler kiriş modeli geliştirilmiş KNT burkulma [17] ve titreşim [8] analizlerine uygulanmıştır. Yakın zamanda Timoshenko kiriş teorisi ÇDKT in titreşim ve burkulma analizinde kullanılmıştır [7-13]. Bu konuda detaylı literatür [10] verilmiştir.

Karbon tüplerin eş eksenli hareket ettiği varsayımına dayanan tek duvarlı kiriş teorilerinden farklı olarak çok duvarlı kiriş teorileri her bir tüpün ayrı ayrı radyal hareket edebilmesine izin vermektedir [9]. Bu kabul ile parabolik kayma deformasyonu çerçevesinde kuple 2×N hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
 -EI_{11} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + E \left( I_{11} - \frac{4}{3h^2} I_{11}' \right) \frac{\partial^3 u_{11}}{\partial x^3} + c_1 (w_2 - w_1) &= \rho A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \\
 &+ \rho \left( I_{11} - \frac{4}{3h^2} I_{11}' \right) \frac{\partial^3 u_{11}}{\partial^2 t \partial x} - \rho I_{11} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial t^2}, \\
 -E \left( I_{11} - \frac{4}{3h^2} I_{11}' \right) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + E \left( I_{11} - \frac{8}{3h^2} I_{11}' + \frac{16}{9h^4} I_{11}'' \right) \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2} &- G \left( A_1 - \frac{8}{h^2} I_{11} + \frac{16}{h^4} I_{11}' \right) u_{11} \\
 &= \rho \left( \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial t^2} \right) \left( I_{11} - \frac{8}{3h^2} I_{11}' + \frac{16}{9h^4} I_{11}'' \right) - \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial t^2} \left( I_{11} - \frac{4}{3h^2} I_{11}' \right)
 \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned}
EI_{12} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + E \left( I_{12} - \frac{4}{3h^2} I'_{12} \right) \frac{\partial^3 u_{12}}{\partial x^3} + c_1 (w_1 - w_2) + c_2 (w_3 - w_2) &= \rho A_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \\
&+ \rho \left( I_{12} - \frac{4}{3h^2} I'_{12} \right) \frac{\partial^3 u_{12}}{\partial^2 t \partial x} - \rho I_{12} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial t^2}, \\
- E \left( I_{12} - \frac{4}{3h^2} I'_{12} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + E \left( I_{12} - \frac{8}{3h^2} I'_{12} + \frac{16}{9h^4} I''_{12} \right) \frac{\partial^2 u_{12}}{\partial x^2} - G \left( A_2 - \frac{8}{h^2} I_{12} + \frac{16}{h^4} I'_{12} \right) u_{12} & \quad (6b) \\
= \rho \left( \frac{\partial^2 u_{12}}{\partial t^2} \right) \left( I_{12} - \frac{8}{3h^2} I'_{12} + \frac{16}{9h^4} I''_{12} \right) - \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial t^2} \left( I_{12} - \frac{4}{3h^2} I'_{12} \right).
\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
- EI_{1N} \frac{\partial^4 w_N}{\partial x^4} + E \left( I_{1N} - \frac{4}{3h^2} I'_{1N} \right) \frac{\partial^3 u_{1N}}{\partial x^3} + c_{N-1} (w_N - w_{N-1}) - k w_N &= \rho A_N \frac{\partial^2 w_N}{\partial t^2} \\
&+ \rho \left( I_{1N} - \frac{4}{3h^2} I'_{1N} \right) \frac{\partial^3 u_{1N}}{\partial^2 t \partial x} - \rho I_{1N} \frac{\partial^4 w_N}{\partial x^2 \partial t^2}, \\
- E \left( I_{1N} - \frac{4}{3h^2} I'_{1N} \right) \frac{\partial^3 w_N}{\partial x^3} + E \left( I_{1N} - \frac{8}{3h^2} I'_{1N} + \frac{16}{9h^4} I''_{1N} \right) \frac{\partial^2 u_{1N}}{\partial x^2} & \quad (6n) \\
- G \left( A_N - \frac{8}{h^2} I_{1N} + \frac{16}{h^4} I'_{1N} \right) u_{1N} = \rho \left( \frac{\partial^2 u_{1N}}{\partial t^2} \right) \left( I_{1N} - \frac{8}{3h^2} I'_{1N} + \frac{16}{9h^4} I''_{1N} \right) \\
- \frac{\partial^3 w_N}{\partial x \partial t^2} \left( I_{1N} - \frac{4}{3h^2} I'_{1N} \right)
\end{aligned}$$

burada  $I_{ij}$ 'ler Eşitlik (5)'te tanımlanmış ve  $j$  tüp numarasını,  $A_j$  ise her bir tüpün kesit alanını göstermektedir. Genel olarak KNT in mekanik özellikleri tüp çapına yapıdaki tüp sayısına ve şiralliğe bağlı olmasına rağmen bu çalışmada bu etkiler ihmal edilerek bu özellikler sabit olarak alınmıştır. Bu çalışmada tüp iç ve dış çapları sırasıyla  $d_1=0.7$  nm ve  $d_2=1.4$  nm olarak alınmıştır. Bundan başka tüp elastisite modülü 1TPa, kayma modülü 0.4 TPa, Poisson oranı 0.25, yoğunluk  $2.3 \text{ g/cm}^3$  ve etkin tüp kalınlığı 0.35nm olarak alınmıştır (Şekil 1).

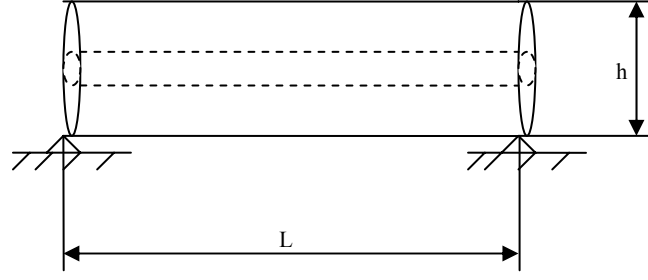
İki tüpün çökmesi van der Waals etkileşim basıncı ile kuple olmaktadır. Tüpler arasındaki van der Waals etkileşimi aşağıdaki gibi verilebilir [17].

$$P_{j(j+1)} = c_j (w_{j+1} - w_j) \quad (7)$$

Bu ifadede ki van der Waals etkileşim katsayısı  $c_j$  aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır [7-9]:

$$c_j = \frac{320 \times (2r_j) \text{erg} / \text{cm}^2}{0.16d^2}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (8)$$

bu ifade de  $r_j$   $j$ . tüpün iç yarıçapı ve  $d=0.142$  nm,  $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$  ( karbon-karbon C-C bağının uzunluğudur).



Şekil 1. Çift duvarlı karbon nanotüp geometrisi.

#### 4. ÇİFT DUVARLI KNT LERİN DÜŞEY TİTREŞİMLERİ

Bu çalışmada basit parabolik kayma deformasyon teorisi basit destekli KNT lerin titreşimi için kullanılmaktadır. Her iki tüpün basit destekli olduğu varsayılırsa aşağıdaki sınır şartları elde edilir.

$$w = M = M^a = 0 \quad (9)$$

Verilen basit destekli sınır şartları ve hareket denklemleri yer değiştirme alanının aşağıdaki gibi seçilmesiyle sağlanır.

$$w_i = W_i \sin \frac{n\pi x}{L} \sin(\omega t) \quad , \quad Lu_i = U_i \cos \frac{n\pi x}{L} \sin(\omega t) \quad , \quad i=1, 2 \quad , \quad (10)$$

burada  $W_1$  ve  $W_2$  sırasıyla iç ve dış tüpün genliklerini,  $U_{11}$  ve  $U_{12}$  ise iç ve dış tüpte kayma sonucu oluşan deformasyonların genliğidir. Burada  $n$  yarı dalga sayısını göstermektedir. Eşitlik 10 hareket denklemlerine yazılırsa aşağıdaki özdeğer eşitliği elde edilir.

$$[K]\{b_i\} = 0 \quad (11)$$

burada  $b_i$  her bir yer değiştirme bileşeni için genliği gösterir. Titreşim problemindeki boyutsuz frekans  $\Omega = \sqrt{\rho A \omega_n^2 L^4 / (EI)}$  şeklinde tanımlanmıştır.  $K$  matrisinin elemanları ekte verilmiştir.

##### 4.1. Eş eksenli olmayan çökmeler ve kayma deformasyonlarının etkileri

Eş eksenli olmayan çökmeler ve kayma deformasyonunun ÇDKT titreşimi üzerindeki etkileri genlik oranı ( $W_1/W_2$ ) ve kayma genlik oranları ( $U_{11}/U_{12}$ ) bulunarak incelenebilir. Eşitlik (11) kullanılarak genlik oranları aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{K_{43}^2 - K_{33}K_{44}}{K_{31}K_{44}} \quad , \quad (12)$$

$$\frac{U_{11}}{U_{12}} = \frac{-K_{34}}{\frac{-K_{31}K_{22}}{K_{21}} + K_{33} \left( \frac{K_{12}K_{22} - K_{12}^2}{K_{13}K_{12}} \right)} \quad (13)$$

burada  $K_{ij}$  ler (11) eşitliğinde verilen matrisin elemanlarıdır.

## 5. SAYISAL SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada ilk olarak boyutsuz titreşim frekansları tek duvarlı parabolik kayma deformasyon teorisi kullanılarak (TDPKDT)  $\Omega_{n1}$  ve  $\Omega_{n2}$  frekansları bulunarak Tablo 1 ve 2 de sunulmaktadır. TDPKDT ile bulunan sonuçlar Tek duvarlı Euler kiriş teorisi (TDEKT) ile bulunan sonuçlar ile kıyaslanmış ve  $L/h=100$  oranı için iyi bir uyum olduğu gözlenmiştir. Narinlik oranının azalması ile iki teori arasındaki fark artmaktadır. TDPKDT Timoshenko kiriş modeli gibi iki adet  $n$  mertebe frekans verirken TDEKT modeli bir adet  $n$  mertebe frekans vermektedir.

**Tablo 1.** ÇDKNT için frekans parametresi ( $\Omega_{n1}$ ).

$n$	TDPKDT				TDEKT
	$L/h=10$	$L/h=20$	$L/h=50$	$L/h=100$	
1	3.1278	3.1375	3.1410	3.1414	3.1415
2	6.1735	6.2561	6.2789	6.2817	6.2821
3	9.0418	9.3331	9.4102	9.4211	9.4247
4	11.612	12.347	12.531	12.557	12.566
5	13.757	15.273	15.640	15.685	15.707

**Tablo 2.** ÇDKNT için frekans parametresi ( $\Omega_{n2}$ ).

$N$	TDPKDT			
	$L/h=10$	$L/h=20$	$L/h=50$	$L/h=100$
1	24.518	48.687	121.480	242.891
2	25.252	49.035	121.616	242.960
3	26.634	49.632	12.847	243.074
4	28.996	50.505	122.171	243.235
5	33.043	51.694	122.591	243.441

Tablo 2’den görüldüğü gibi ikinci grup frekans ( $\Omega_{n2}$ )  $L/h>20$  için frekans numarasına duyarlı değil iken  $\Omega_{n1}$  e göre  $L/h$  oranına daha duyarlıdır. Boyutsuz frekansların mode sayısı ve  $L/h$  oranı ile değişimi Tablo 3-5 te verilmiş ve Çift duvarlı Timoshenko kiriş teorisi (ÇDTKT) ve çift duvarlı Euler kiriş teorisi (ÇDEKT) sonuçları ile kıyaslanmıştır. Tablolardan görüleceği üzere en küçük frekans  $\Omega_{n1}$  mode sayısının artmasıyla hızla artmakta iken, diğer frekanslar mode sayısına duyarlı değildir. Yüksek mertebe frekanslar ( $k>1$ )  $L/h$  oranına oldukça duyarlıdır. Kayma deformasyon etkileri  $L/h$  oranının artmasıyla kaybolmaktadır. Kayma deformasyonunun  $\Omega_{n1}$  üzerindeki etkisi  $\Omega_{n2}$  deki etkiden daha fazladır. Mevcut kiriş teorisiyle elde edilen frekans sonuçları He ve ark.[21] tarafından Donnell kabuk teorisiyle elde edilenlerle kıyaslanmış küçük yarıçaplar için (%5-6) fark varken büyük çaplı tüpler için fark %20 lere kadar çıkmaktadır.

**Tablo 3.** ÇDKNT için frekans parametresi ( $\Omega_{n1}$ ).

$N$	ÇDPKDT		ÇDTKT (Ref.12)		ÇDEKT(Ref.12)	
	$L/h=10$	$L/h=50$	$L/h=10$	$L/h=50$	$L/h=10$	$L/h=50$
1	3.1199	3.1406	3.0662	3.1438	3.1410	3.1416
2	6.1275	6.2760	6.0378	5.8453	6.2650	6.2832
3	8.9633	9.4008	8.5758	9.3509	9.2756	9.4245
4	11.547	12.510	10.850	12.536	11.880	12.565
5	13.761	15.599	13.115	15.726	13.946	15.705

**Tablo 4.** ÇDKNT için frekans parametresi ( $\Omega_{n2}$ ).

n	ÇDPKDT		ÇDTKT (Ref.12)		ÇDEKT(Ref.12)	
	L/d=10	L/d=50	L/d=10	L/d=50	L/d=10	L/d=50
1	12.741	63.563	12.700	63.485	12.720	63.560
2	12.937	63.576	12.714	63.490	12.843	63.561
3	13.577	63.601	12.805	63.502	13.381	63.565
4	15.119	63.643	13.846	63.517	14.832	63.576
5	18.289	63.707	15.016	63.522	17.383	63.601

**Tablo 5.** ÇDKNT için frekans parametresi .

n	$\Omega_{n3}$			$\Omega_{n4}$		
	L=10d	L=20d	L=50d	L=10d	L=20d	L=50d
1	21.993	43.534	108.514	30.898	61.628	153.952
2	22.825	43.986	108.699	31.228	61.797	154.020
3	24.043	44.704	109.005	31.755	62.075	154.133
4	25.575	45.650	109.429	32.450	62.457	154.291
5	27.686	46.787	109.965	33.292	62.938	154.493

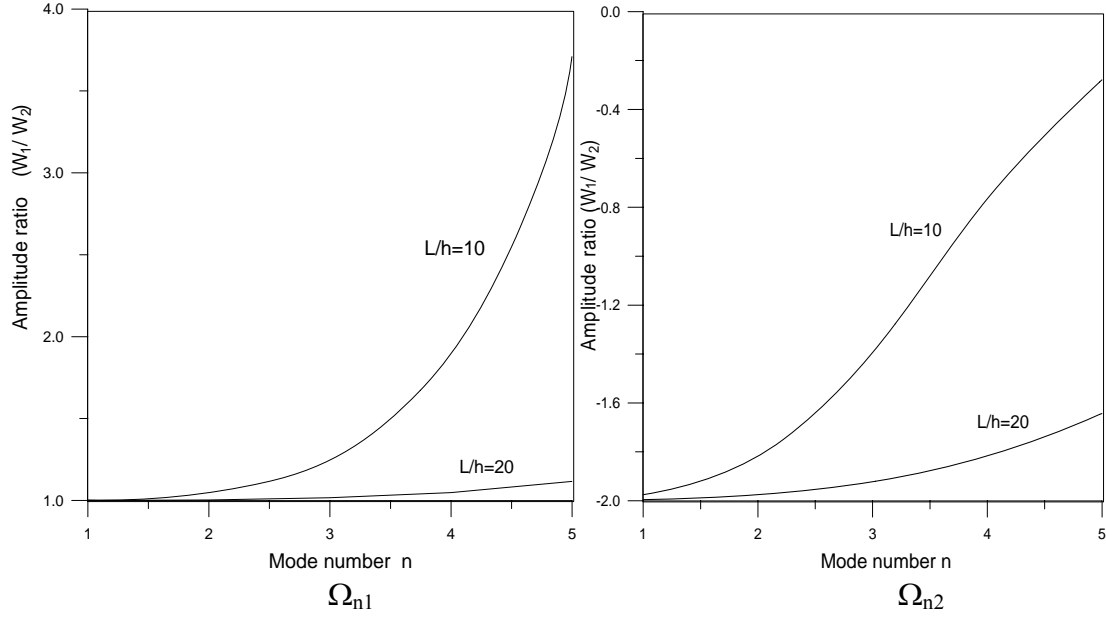
**Tablo 6.** Bu çalışmada elde edilen frekansların (Hz) He ve ark. Kabuk modeli ile elde ettiği sonuçlarla kıyaslanması.

Teori	$R_i=0.5\text{nm}$	$R_i=1\text{nm}$	$R_i=5\text{nm}$
Bu çalışma	4.7637	3.0457	0.81935
Ref.18	4.4590	2.8960	0.6802
% fark	6.83	5.16	20.45

Genlik oranları Şekil 2’de verilmiştir. Bu şekillere göre: En küçük frekans  $\Omega_{n1}$  genlik oranı ( $W_1/W_2$ )  $L/h=10$  için  $n>2$  durumda ani bir artış olurken  $L/h=20$  için genlik oranı bire yaklaşmaktadır. Genlik oranının pozitif olması her iki tüpün eş eksenli deformasyona uğradığını göstermektedir. İkinci frekans grubu için genlik oranı negatiftir. Bu durum eş eksenli olmayan deformasyonu göstermektedir. Bu grup için genlik oranı artan mode sayısı ile artmaktadır.

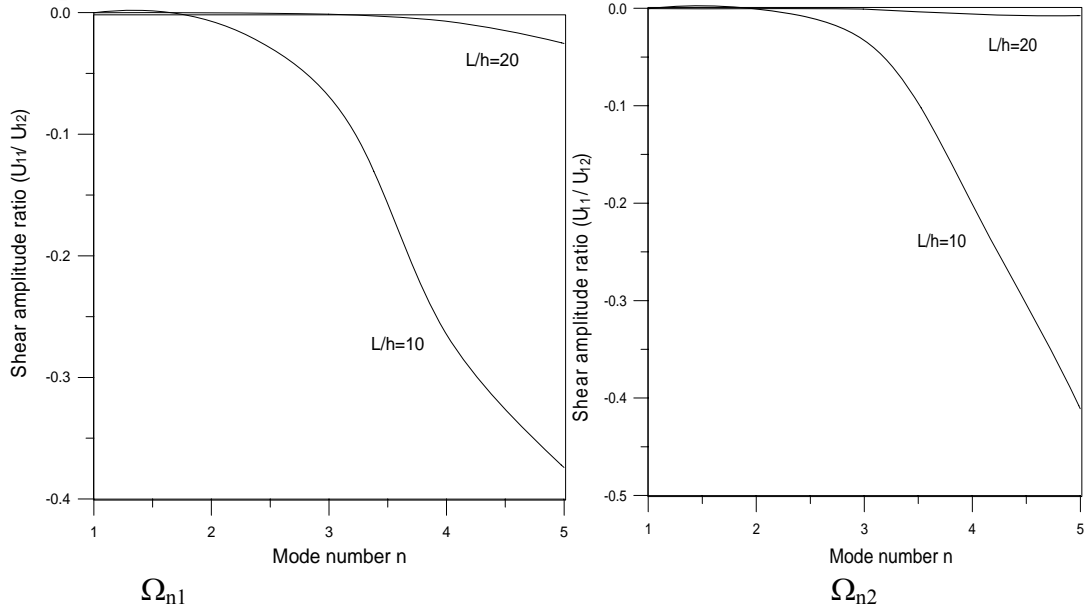
## 6. SONUÇ

Parabolik kayma deformasyon teorisi kullanılarak çok duvarlı karbon nanotüplerin düşey titreşimleri modellenmiştir. Tüpler arası vdW kuvvetinin etkisi dikkate alınarak basit destekli çift duvarlı tüpler incelenmiştir. Parabolik teori Timoshenko teorisinden biraz daha büyük frekans değerleri vermektedir. Bu çalışma diğer sınır şartlarına genişletilebilir.



Şekil 2. ÇDKNT lerin  $\Omega_{n1}$  ve  $\Omega_{n2}$  için genlik oranları ( $W_1/W_2$ ).

Şekil 3'te kayma genlik oranları verilmektedir. İlk iki frekans grubu için genlik oranları negatiftir ve artan mode sayısı ile artmaktadırlar. Kayma genlik oranının birden küçük olması dıştaki tüp için kayma deformasyonunun daha etkin olduğunu göstermektedir.



Şekil 3. ÇDKNT lerin  $\Omega_{n1}$  ve  $\Omega_{n2}$  için kayma genlik oranları ( $U_{11}/U_{12}$ ).



## EK

K matrisinin sıfırdan farklı terimleri

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= \frac{A_1}{A} \Omega^2 - \varepsilon - \frac{I_{11}}{I} \beta^4 - \frac{I_{11} \beta^2}{AL^2} \Omega^2 \\
 K_{12} &= K_{21} = \left( \frac{\beta^3}{I} - \frac{\beta}{AL^2} \Omega^2 \right) \Delta_1 \\
 K_{13} &= K_{31} = \varepsilon \\
 K_{22} &= \left( \frac{\Omega^2}{AL^2} - \frac{\beta^2}{I} \right) \Delta_2 - \frac{GL^2}{EI} \Gamma_1 \\
 K_{33} &= \frac{A_2}{A} \Omega^2 - \varepsilon - \frac{I_{12}}{I} \beta^4 - \frac{I_{12} \beta^2}{AL^2} \Omega^2 - \frac{k}{c} \varepsilon \\
 K_{34} &= K_{43} = \left( \frac{\beta^3}{I} - \frac{\beta}{AL^2} \Omega^2 \right) \Delta_3 \\
 K_{44} &= \left( \frac{\Omega^2}{AL^2} - \frac{\beta^2}{I} \right) \Delta_4 - \frac{GL^2}{EI} \Gamma_2
 \end{aligned} \tag{A-1}$$

(A-1) eşitliğindeki boyutsuz sabitler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2, \quad I = I_{11} + I_{12}, \quad \varepsilon = \frac{cL^4}{EI}, \quad \beta = m\pi, \quad \Omega = \sqrt[4]{\rho A \omega_n^2 L^4 / (EI)} \\
 \Delta_1 &= I_{11} - \frac{4}{3h^2} I'_{11}, \\
 \Delta_2 &= I_{11} - \frac{8}{3h^2} I'_{11} + \frac{16}{9h^4} I''_{11} \\
 \Delta_3 &= I_{12} - \frac{4}{3h^2} I'_{12}, \\
 \Delta_4 &= I_{12} - \frac{8}{3h^2} I'_{12} + \frac{16}{9h^4} I''_{12} \\
 \Gamma_1 &= A_1 - \frac{8}{h^2} I_{11} + \frac{16}{h^4} I'_{11} \\
 \Gamma_2 &= A_2 - \frac{8}{h^2} I_{12} + \frac{16}{h^4} I'_{12}
 \end{aligned}$$

## KAYNAKLAR

- [1] Iijima S. Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature* 1991; **354**:56-58.
- [2] Dai H, Hafner JH, Rinzler AG, Colbert DT, Smalley RE. Nanotubes as nanoprobe in scanning probe microscopy. *Nature* 1996; **384**:147-150.
- [3] Bachtold A, Hadley P, Nakanishi T, Dekker C. Logic circuits with carbon nanotubes transistors. *Science* 2001; **294**:1317-20.
- [4] Kim P, Lieber CM. Nanotube nanotweezers. *Science* 1999; **286**: 2148-50.
- [5] Thostenson ET, Ren Z, Chou T.W: Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites: a review. *Compos Sci Tech* 2001; **61**:1899-12.
- [6] Wong EW, Sheehan PE, Lieber CM. Nanobeam mechanics: elasticity, strength, and toughness of nanorods and nanotubes. *Science* 1997; **277**:1971-75.
- [7] Yoon J, Ru CQ, Mioduchowski A. Non-coaxial resonance of an isolated multiwall carbon nanotube. *Phys. Rev. B.* 2002; **66**: Art.No. 233402.
- [8] Yoon J, Ru CQ, Mioduchowski A. Vibration of embedded multiwall carbon nanotubes. *Compos. Sci. Techn.* 2003; **63**:1533-42.
- [9] Yoon J, Ru CQ, Mioduchowski A. Terahertz vibration of short carbon nanotubes modelled as Timoshenko-beams. *Transactions of the ASME.* 2005; **72**:10-7.
- [10] Gibson RF, Ayorinde EO, Wen YF. Vibrations of carbon nanotubes and their composites: A review. *Compos Sci Technol* 2007; **67**:1-28.
- [11] Fu YM, Hong JW, Wang XQ. Analysis of nonlinear vibration for embedded carbon nanotubes. *Journal of Sound and vibration* 2006; **296**:746-756.
- [12] Wang CM, Tan VBC, Zhang YY. Timoshenko beam model for vibration analysis of multi-walled carbon nanotubes. *Jour Sound and Vib* 2006; **294**:1060-72.
- [13] Ece MC, Aydogdu M. Nonlocal elasticity effect on vibration of in-plane loaded double-walled carbon nano-tubes. *Acta Mechanica*(doi:10.1007/s00707-006-0417-5)
- [14] Soldatos, K.P., Timarci, T., 1993. A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five degrees of freedom cylindrical shell theories. *Composite Structures* .25(1-4),165-171.
- [15] Aydogdu, M., 2005. Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method. *Int Jnl Mech Sci.* 47(11),1740-1755.
- [16] Reddy, J.N.,1984. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME.*51(4),745-52.
- [17] Ru, C.Q.,2000b. Elastic buckling of single-walled carbon nanotube ropes under high pressure. *Phys. Rev. B.* 62,10405-8.
- [18] He XQ, Eisenberger M, Liew KM. The effect of van der Waals interaction modeling on the vibration characteristics of multiwalled carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics.* 2006; **100**:124317.